MATEMÁTICAS

Álgebra

CONVERSIÓN DE DECIMAL PERIÓDICO A FRACCIÓN COMÚN

Tipos de números decimales

$$\text{Decimales}\begin{cases}\text{Exactos}: 4.28\\ \text{Infinitos}\begin{cases}\text{Puros}: 2.\overline{35}\\ \text{Mixtos}: 5.48\overline{24}\end{cases}\\ \text{No Periódicos}: \sqrt{2}=1.4142\ldots,\ p=3.1415\ldots,\ e=2.718\ldots\end{cases}$$

- **Para convertir un número decimal periódico puro a fracción:**

Se coloca una línea de fracción, en el ***numerador*** se escribe el número sin el punto decimal y se le resta la parte entera del número decimal y en el ***denominador*** se colocan tantos *nueves* como dígitos tenga el periodo.

Ejemplo:

Convierte el siguiente número decimal $0.\overline{24}$ a fracción.

Solución:

$$0.\overline{24}=\frac{24-0}{99}=\frac{24}{99}$$

Ejemplo:

Representar como el cociente de dos enteros el siguiente número decimal periódico: $4.\overline{1652}$

Solución:

$$4.\overline{1652}=\frac{41652-4}{9999}=\frac{41648}{9999}$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es el inciso D.

- **Para convertir un número decimal periódico mixto a fracción:**

Se coloca una línea de fracción, en el ***numerador*** se escribe el número sin el punto decimal y se le resta la parte que está fuera del periodo, también sin punto decimal, es decir, la parte entera unida a los decimales que se quedan fuera del periodo.

En el ***denominador*** se colocan tantos *nueves* como dígitos tenga el periodo, seguido de tantos *ceros* como dígitos decimales haya fuera del periodo.

Ejemplo:

Convierte el siguiente número decimal $0.3\overline{5}$ a fracción.

Solución:

$$0.3\overline{5} = \frac{35-3}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es el inciso A.

Ejemplo:

Representar como el cociente de dos enteros el siguiente número decimal periódico: $46.58\overline{29}$

Solución:

$$46.581\overline{29} = \frac{4\,658\,129 - 46581}{99000} = \frac{4\,611\,548}{99000} = \frac{1\,152\,887}{24\,750}$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es el inciso B.

Ejercicios

Representar como el cociente de dos enteros los siguientes números decimales periódicos:

A) $0.\overline{18}$

B) $4.\overline{9}$

C) $0.\overline{1234}$

D) $1.2\overline{7}$

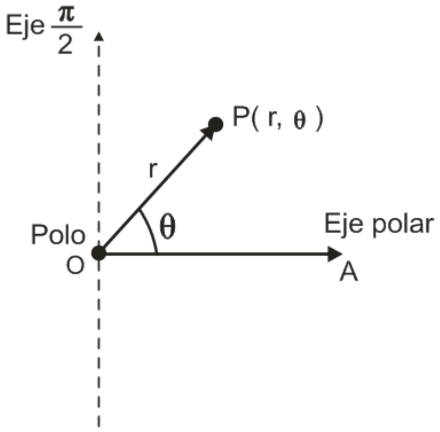
E) $0.3\overline{62}$

COORDENADAS POLARES

En un sistema de coordenadas en un plano, es posible localizar un punto del plano. En el sistema rectangular esto ocurre refiriendo el punto a 2 rectas fijas perpendiculares que reciben el nombre de *ejes de coordenadas*.

En el sistema polar un punto se localiza indicando su posición con respecto a una recta fija y un punto fijo de esa recta.

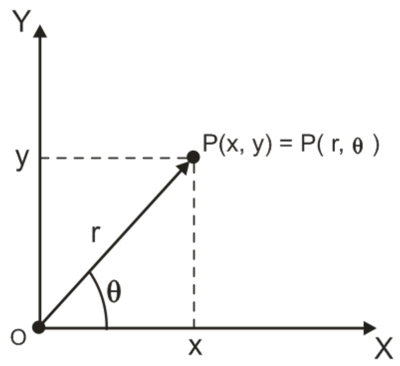
La recta fija recibe el nombre de ***eje polar*** y al punto fijo se le nombra ***polo***.



Un lugar geométrico determinado, puede transformarse de la ecuación rectangular a polar y recíprocamente.

Para realizar la transformación se debe conocer la relación que existe entre las coordenadas rectangulares y las coordenadas polares en cualquier punto del lugar geométrico.

Sea P un punto cualquiera que contiene las coordenadas rectangulares (x, y) y por coordenadas polares (r, θ), entonces, la relación entre ellas es:



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ejemplo:

Determina las coordenadas rectangulares del punto A(10, 60°) en el plano.

Solución:

El punto tiene la forma (r, θ), entonces:

$$r = 10 \text{ y } \theta = 60°$$

Se toma la siguiente relación entre las coordenadas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Se observa que 60° está en el primer cuadrante, entonces, las razones seno y coseno son positivas, se sustituyen los valores y se realizan las operaciones indicadas.

$$x = 10\cos 60° = 10\left(+\frac{1}{2}\right) = 5 \qquad y = 10\,\text{sen}\,60° = 10\left(+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5\sqrt{3}$$

Entonces, el punto tiene de coordenadas $\left(5, 5\sqrt{3}\right)$

Ejemplo:

Transforma a coordenadas rectangulares la ecuación y = 4x + 3.

Solución:

Se toma la siguiente relación entre las coordenadas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Estas se sustituyen en la ecuación dada y se aplica, identidades trigonométricas

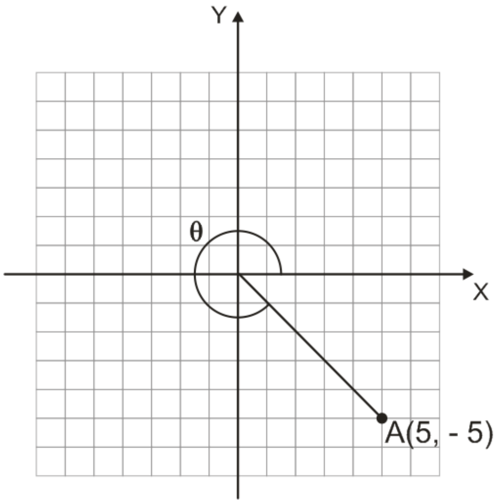
$$\begin{aligned} y &= 4x + 3 \\ r\,\text{sen}\,\theta &= 4\left(r\cos\theta\right) + 3 \\ r\,\text{sen}\,\theta &= 4r\cos\theta + 3 \\ r &= \frac{4r\cos\theta + 3}{\text{sen}\,\theta} \\ r &= \frac{4r\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} + \frac{3}{\text{sen}\,\theta} \\ r &= 4r\,\text{ctg}\,\theta + 3\csc\theta \end{aligned}$$

Ejercicios

1. Determina las coordenadas rectangulares del punto A(2, 30°) en el plano.

A) $A\left(\sqrt{2}, 3\right)$ B) $A\left(1, \sqrt{3}\right)$ C) $A\left(\sqrt{3}, 1\right)$ D) $A\left(2\sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$

2. Determina las coordenadas polares del punto A en el plano.



A) $A\left(5\sqrt{2}, 315°\right)$ B) $A\left(5, 45°\right)$ C) $A\left(-10, -30°\right)$ D) $A\left(50, 225°\right)$

3. Transforma la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ a coordenadas polares.

A) $r^2 = 9\tan\theta$ B) $r^2 = 9 - r\,\mathrm{sen}\,\theta$ C) $r^2 = 9$ D) $r^2 = 9r\cos\theta$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Si **f** y **g** son funciones continuas de “**t**” en un intervalo **I**, entonces, a las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Se les llama ***ecuaciones paramétricas*** y a “**t**” se le llama ***parámetro***, al conjunto de puntos **(x, y)** que se tiene cuando “**t**” varía sobre el intervalo **I** se le llama gráfica de las ecuaciones paramétricas. A las ecuaciones paramétricas y a la gráfica, juntas, recibe el nombre de ***curva plana***.

Ejemplo:

Determina las coordenadas rectangulares de las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = t^2 - 5 \\ y = \dfrac{t}{3} \end{cases}$$

Solución:

Se busca en cualquiera de las 2 ecuaciones, aquella en la cual se pueda despejar el parámetro y el resultado se sustituye en la otra ecuación paramétrica.

$$\begin{cases} x = t^2 - 5 \\ y = \dfrac{t}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t^2 - 5 \\ t = 3y \end{cases} \Rightarrow \{ x = (3y)^2 - 5$$

Se realizan las operaciones indicadas, como a continuación se ejemplifica.

$$x = (3y)^2 - 5$$

$$x = 9y^2 - 5$$

$$9y^2 - x - 5 = 0$$

Finalmente, las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = t^2 - 5 \\ y = \dfrac{t}{3} \end{cases}$ representa la parábola horizontal $9y^2 - x - 5 = 0$.

Ejercicios

1. Transforma a coordenadas rectangulares las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases}$$

A) $y^2 = 4x + 1$ B) $y = x + 2$ C) $y = 2x + 1$ D) $x^2 + y^2 = 4$

2. Transforma a coordenadas rectangulares las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t^2} \\ y = \sqrt{4 - t} \end{cases}$$

A) $x^2 + y^2 = 4$ B) $5x^2 + 9y^2 = 16$ C) $y = \dfrac{4}{x + 1}$ D) $y = \sqrt{x - 4}$

3. Transforma a coordenadas rectangulares las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = 3\cos\theta \end{cases}$$

A) $x^2 = 9x$ B) $x^2 - y^2 = 81$ C) $y = \sqrt{1 - x^2}$ D) $x^2 + y^2 = 9$

LÍMITES LATERALES

Existen funciones que por la izquierda de un punto tienen un comportamiento y por la derecha también se comportan de otra manera. Esto ocurre en funciones que tienen reglas de correspondencia definidas en un intervalo y que en su gráfica presenta un salto en un punto, para obtener el límite de la función en un punto es necesario obtener su límite tanto por la izquierda como por la derecha.

Se denotan de la siguiente manera:

$\lim_{x \to a^+} f(x)$: límite por la derecha

$\lim_{x \to a^-} f(x)$: límite por la izquierda

Ejemplo:

Determina el valor de "**A**" para que la función

$$\begin{cases} x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2}Ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + Ax + 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Sea: continúa en x = 1.

Solución:

Se debe definir el intervalo que se encuentra a la derecha e izquierda de 1.

$x \le 1 \rightarrow (-\infty, 1]$ todos los x, se encuentran a la izquierda de 1

$x > 1 \rightarrow (1, \infty)$ todos los x, se encuentran a la derecha de 1

Se obtienen los límites laterales

$$\lim_{x \to 1^-}\left(x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2}Ax - 2\right) = (1)^3 + \frac{9}{2}(1)^2 + \frac{3}{2}A(1) - 2 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}A$$

$$\lim_{x \to 1^+}\left(-x^2 + Ax + 6\right) = -(1)^2 + A(1) + 6 = 5 + A$$

Para que la función sea continúa en x = 1, los límites laterales deben ser iguales.

$$\lim_{x \to 1^-}\left(x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2}Ax - 2\right) = \lim_{x \to 1^+}\left(-x^2 + Ax + 6\right)$$

$$\frac{7}{2} + \frac{3}{2}A = 5 + A$$

$$\frac{3}{2}A - A = 5 - \frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{2}A = \frac{3}{2}$$

$$A = 3$$

Por lo tanto, la función es continúa en x = 1, cuando A = 3.

Ejercicios

1. Determina los límites laterales de la función $f(x)=\begin{cases}3x-2 & \text{si } x>2\\ x^2-9 & \text{si } x\le 2\end{cases}$.

A) – 5, – 1　　B) 3, – 4　　C) 1, 5　　D) 4, – 5

2. Determina el valor de “A” para que la función sea continua en x = 1

$$f(x)=\begin{cases}3x+A & \text{si } x\ge 1\\ 9-Ax^2 & \text{si } x<1\end{cases}$$

A) 3　　B) 2　　C) 0　　D) – 2

Probabilidad y Estadística

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Media aritmética, Geométrica y Armónica

Se denomina **promedio**, a un número representativo de un conjunto de datos numéricos finitos, el cual esta comprendido entre el menor y mayor valor de los datos.

$$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5,\dots a_{n-2}<a_{n-1}<a_n$$

$$a_1<\text{promedio}<a_n$$

Clases de promedios

Dado los números $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5,\dots a_{n-2}<a_{n-1}<a_n$ los promedios se definen como:

Media aritmética

$$MA=\frac{\text{suma de las cantidades}}{\text{Número de cantidades}}=\frac{a_1+a_2+a_3+a_5+\dots+a_n}{n}$$

Media geométrica

$$MG=\sqrt[\text{número de cantidades}]{\text{producto de cantidades}}=\sqrt[n]{a_1\times a_2\times a_3\times a_5\times\dots\times a_n}$$

Media armónica

$$MH=\frac{\text{número de cantidades}}{\text{suma de los reciprocos de las cantidades}}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\dots+\frac{1}{a_n}}$$

Relación entre los promedios

Sean los números a_1, a_2 dos cantidades, entonces:

$$MA = \frac{a_1 + a_2}{2} \Rightarrow a_1 + a_2 = 2MA$$

$$MG = \sqrt[2]{a_1 \times a_2} \Rightarrow a_1 \times a_2 = (MG)^2$$

$$MH = \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} \Rightarrow MH = \frac{2(MG)^2}{2MA} = \frac{(MG)^2}{MA}$$

Por lo tanto

$$MG = \sqrt{MH \times MA}$$

Propiedades

1. Para varias números, no todos iguales

$$MH < MG < MA$$

2. Para solo 2 números a_1 y a_2 se cumple lo siguiente:

$$a_1 \times a_2 = MH \times MA$$

3. Para solo 2 números a_1 y a_2 se cumple lo siguiente:

$$MG = \sqrt{MH \times MA}$$

Ejemplo:

Determina dos números si se sabe que el mayor y el menor de sus promedios son 7 y $\frac{48}{7}$ respectivamente.

Solución:

Se sabe $MH < MG < MA$, entonces:

$$\frac{48}{7} < MG < 7$$

Luego, se obtienen las siguientes expresiones

$$MA = \frac{a_1 + a_2}{2} \Rightarrow 7 = \frac{a_1 + a_2}{2} \Rightarrow a_1 + a_2 = 14$$

$$MH = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} \Rightarrow \frac{48}{7} = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} \Rightarrow \frac{48}{7} = \frac{2a_1a_2}{14} \Rightarrow a_1 \times a_2 = 48$$

Al resolver el sistema se obtiene que los números son: $a_1 = 6$ y $a_2 = 8$

Ejercicios

1. Si se cumple que para 2 cantidades que su $MA = 64$ y $MH = 25$, determina MG.

A) 55 B) 40 C) 38 D) 29

2. Una persona de un Centro De Atención Telefónica realiza llamadas a posibles clientes durante 3 días, en cada uno de esos días realiza las llamadas a distinta velocidad.

   Día 1: 80 llamadas / h

   Día 2: 85 llamadas / h

   Día 3: 70 llamadas / h

¿Cuál es la velocidad media de llamadas en esos 3 días?

(Sugerencia: Cuando se manejan velocidades el promedio más adecuado es la media armónica)

A) 103.26 llamadas / h B) 90 llamadas / h C) 85.31 llamadas / h D) 77.92 llamadas / h

PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS

Propiedades	Unión	Intersección
Asociativa	$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$
Conmutativa	$A\cup B = B\cup A$	$A\cap B = B\cap A$
Distributiva	$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$
Idempotencia	$A\cup A = A$	$A\cap A = A$
Absorción	$A\cup(B\cap A) = A$	$A\cap(B\cup A) = A$
Neutro	$A\cup\varnothing = A$ $A\cup U = U$	$A\cap\varnothing = \varnothing$ $A\cap U = A$
Complemento	$A\cup A^c = U$	$A\cap A^c = \varnothing$
Leyes de De Morgan	$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$	$(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$

Se cumple también que:

1. $(A^c)^c = A$
2. $A - B = A\cap B^c$
3. $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$
4. $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

1. Si $A \cap B = \phi$ (A y B se excluyen mutuamente), entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2. $P(A) + P(A^c) = 1$
3. Si $A \cap B = \phi$ entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4. Sean A y B eventos independientes (la ocurrencia de A no influye en la ocurrencia de B), Entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

5. Sean A y B eventos independientes (la ocurrencia de A influye en la ocurrencia de B), Entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A)$$

Con $P(B / A)$ la probabilidad del evento B, sabiendo que ha ocurrido A.

Ejemplo:

Identifica la probabilidad que es equivalente a la siguiente expresión:

$$P(A^c \cup B^c)$$

Solución:

Se sabe que para cualquier conjunto M, se cumple lo siguiente:

$$P(M) + P(M^c) = 1 \quad , \quad (M^c)^c = M$$

Luego, sea

$$M = A^c \cup B^c$$

Por Leyes De Morgan

$$M = A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$$

Luego.

$$P(M) + P(M^c) = 1$$

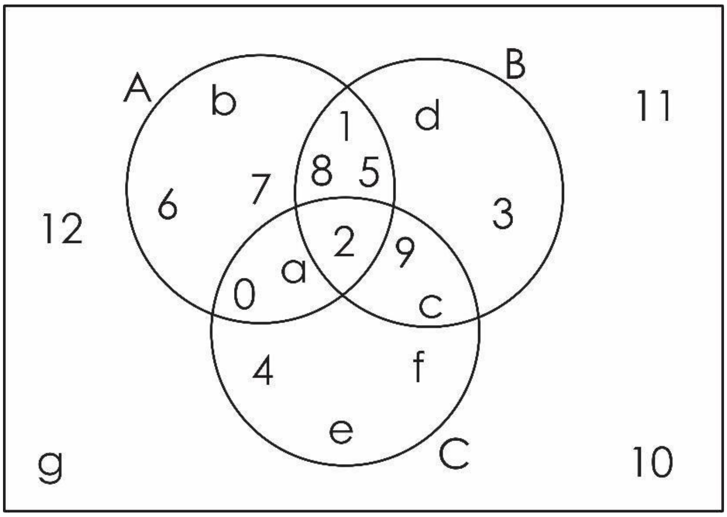
$$P(A^c \cup B^c) + P\left(\left[(A \cap B)^c\right]^c\right) = 1$$

$$P(A^c \cup B^c) + P(A \cap B) = 1$$

$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B)$$

Ejemplo:

Del siguiente diagrama de Venn donde todos los elementos son igualmente probables, determina la probabilidad de las siguiente operaciones o eventos:



1. $P(A \cup B)$
2. $P(A - B)$
3. $P(A \cap B \cap C)$
4. $P(C^c)$

Solución:

Se obtiene la cardinalidad de cada operación (casos favorables) y el total de elementos en el diagrama (casos totales)

$n(A \cup B) = 13$

$n(A - B) = 5$

$n(A \cap B \cap C) = 1$

$n(C^c) = 11$

$n(\text{universo}) = 20$

Se obtiene las probabilidades

1. $P(A \cup B) = \dfrac{13}{20}$
2. $P(A - B) = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$
3. $P(A \cap B \cap C) = \dfrac{1}{20}$
4. $P(C^c) = \dfrac{11}{20}$